ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ И КОМБИНАТОРИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МАГИСТРАТУРУ ПО КОНКУРСНЫМ ГРУППАМ ФПМИ

Структура программы: Программа состоит из двух разделов. Поступающие по конкурсным группам "Современная комбинаторика" и "Цифровая экономика" сдают вступительное испытание в соответствии с разделом 1 программы, поступающие по конкурсным группам "Contemporary Combinatorics", "Modern state of Artificial Intelligence" и "Advanced Combinatorics" - в соответствии с разделом 2.

Раздел 1

Регламент проведения

Вступительное испытание состоит из двух частей: решение письменных заданий по программе письменной части, продолжительностью 1,5 астрономических часа, и устной части по программе устной части.

Письменная часть, как правило, состоит из 6 заданий, первые 4-е из которых оцениваются в 3-и бала, последние два в 4 балла.

Во время проведения письменной части экзамена можно пользоваться следующими ресурсами, и только ими:

- искать любые вещи на www.wolframalpha.com,
- искать любые вещи на www.wikipedia.org,
- консоль системы компьютерной алгебры SymPy по адресу live.sympy.org,
- питоновская консоль по адресу www.python.org/shell.

Внимание! Если Вы посчитали ответ в какой-то задаче с помощью системы компьютерной алгебры, нужно обязательно пояснить, почему ответ такой (не ссылаясь на те справочные материалы, которыми пользовались). Компьютер в данном случае используется как источник подсказки, но написание полного решения – Ваша задача.

Устная часть предполагает:

1. обсуждение итогов выполнения письменных заданий;
2. ответ на устную часть (вопросов из программы экзамена для устной части).

Для подготовки на устную часть из программы предоставляется 0,5 астрономический час. Во время подготовки запрещено пользоваться телефоном, но разрешается использовать рукописные бумажные материалы.

Программа письменной части

1. Предел функции в точке. Критерий Коши. Определение сходимости по Гейне и эквивалентность определений.
2. Замечательные пределы.
3. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на множестве. Равномерная непрерывность. Свойства функций, непрерывных в точке. Разрывы первого и второго рода.
4. Дифференцируемость функции в точке. Производная. Производные высших порядков.

5. Правила дифференцирования. Дифференцирование сложной и обратной функции. Таблица производных.
6. Возрастание, убывание и экстремумы функций. Выпуклость и точки перегиба.
7. Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа.
8. Формула Тэйлора и остаточный член в формуле Тэйлора.
9. Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов с помощью правил Лопиталя.
10. Сходимость функционального ряда. Равномерная сходимость функционального ряда. Критерий и признаки равномерной сходимости.
11. Почленное дифференцирование и интегрирование функционального ряда.
12. Степенные ряды. Сходимость степенного ряда.
13. Неопределенный интеграл и первообразная. Таблица интегралов.
14. Определенный интеграл (интеграл Римана). Интегральные суммы. Критерии интегрируемости по Риману. Вычисление площади под графиком функции. Интегральный критерий сходимости числового ряда.
15. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменной и интегрирования по частям.
16. Несобственные интегралы первого и второго рода.
17. Кратные интегралы. Переход от кратного интеграла к повторному.
18. Теорема о замене переменных в кратном интеграле. Переход к полярным координатам. Объем области в криволинейных координатах.
19. Непрерывность и дифференцируемость функции нескольких переменных.
20. Производная по направлению. Градиент. Частные производные высших порядков.
21. Формула Тэйлора для функции нескольких переменных.
22. Линейные отображения и инвариантное подпространство.
23. Собственные значения и собственные векторы.
24. Жорданова нормальная форма оператора.
25. Ортогональные и унитарные операторы. Сопряженный оператор.
26. Неотрицательные и положительные операторы. Извлечение неотрицательного квадратного корня.

Литература

1. Зорич В.А. Математический анализ. МЦНМО 2002.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А, Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. Любое из последних изданий.
3. Ильин В.А, Позняк Э.Г., Линейная алгебра, Физматлит 1999.
4. Кострикин А.И., Введение в алгебру Часть 2 "Линейная алгебра", Физматлит 2000.

Программа устной части

1. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение множеств. Числовые множества.
2. Функции (инъективность, сюръективность, биективность). Мощность множества. Счетные и несчетные множества. Мощность континуума.
3. Несчетность множества действительных чисел. Счетность множества рациональных чисел.

4. Натуральные числа. Делимость. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел.
5. Числовые последовательности. Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
6. Признаки сходимости числовых последовательностей.
7. Число е и различные способы его определения.
8. Числовые ряды и их сходимость. Критерий сходимости Коши.
9. Абсолютная и условная сходимости рядов. Признаки сходимости рядов.
10. Двойные и повторные ряды.
11. Линейное и аффинное пространства. Факторпространство.
12. Линейная зависимость, базис, размерность и координаты.
13. Прямая сумма линейных пространств.
14. Двойственное векторное пространство.
15. Матрицы, векторы и операции над ними. Определитель матрицы и способы его вычисления. Транспонирование. След матрицы.
16. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Однородные системы. Фундаментальная система решений.
17. Обратная матрица и ее свойства. Способы нахождения обратной матрицы.

Литература

1. Зорич В.А. Математический анализ. МЦНМО 2002.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А, Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. Любое из последних изданий.
3. Ильин В.А, Позняк Э.Г., Линейная алгебра, Физматлит 1999.
4. Кострикин А.И., Введение в алгебру Часть 2 "Линейная алгебра", Физматлит 2000.
5. Виноградов И. М, Основы теории чисел, Москва-Ижевск: 2003

Раздел 2
Регламент проведения

Вступительное испытание представляет из себя письменный экзамен, состоящий из 6-10 задач разного уровня сложности. Все задачи требуют полноценного решения с доказательствами. Во время экзамена разрешается пользоваться следующими ресурсами:

- Wikipedia.org
- Wolframalpha.com
- Live.sympy.org
- Python.org/shell
- CoCalc (SageMath)

Подсчет ответа с помощью одной из этих систем не является полноценным решением или доказательством. Эти ресурсы могут использоваться только в качестве подсказки.

На выполнение заданий дается 3 астрономических часа.

Начала алгебры

1. Группы, абелевы группы, нормальные подгруппы, классические примеры: группы чисел по сложению и умножению, группа невырожденных матриц, группа перестановок, группа вычетов по сложению и по умножению.
2. Кольца, коммутативные, ассоциативные, с единицей. Примеры: кольца чисел, кольца матриц, кольца вычетов, кольца многочленов.
3. Поля, определение и примеры: поле рациональных чисел, вещественных чисел, комплексных чисел, пример конечного поля.

Начала линейной алгебры

1. Системы линейных уравнений и метод Гаусса.
2. Векторное пространство. Определение, примеры: пространство строк, пространства квадратных матриц, пространства симметрических и кососимметрических матриц, пространство многочленов от одной переменной.
3. Линейно независимые и линейно зависимые системы векторов.
4. Базис и размерность векторного пространства.

Начала анализа

1. Последовательности. Пределы последовательностей. Примеры сходящихся и расходящихся последовательностей.
2. Непрерывные функции одной переменной. Пределы функций.
3. Производная. Дифференцируемые функции. Теоремы о средних: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
4. Бесконечно малые и ограниченные величины. Язык o(x) и O(x).
5. Ряд Тейлора
6. Неопределенный интеграл. Первообразная.
7. Определенные интегралы. Несобственные интегралы.

Основы топологии в R^n

1. Топология вещественной прямой. Интервалы и отрезки. Сходящиеся подотрезки.

Открытые и замкнутые множества.
2. Открытые и замкнутые множества в многомерном пространстве.
3. Непрерывные отображения.
4. Компактные подмножества в R^n: конечные подпокрытия. Замкнутость и ограниченность.

Комбинаторика и вероятность

1. Принцип Дирихле (2-3 примера его применения).
2. Стандартные правила подсчета: правила сложения и умножения.
3. Сочетания, размещения и перестановки.
4. Бином Ньютона.
5. Классическое определение и подсчет дискретной вероятности через пространство событий.
6. Графы. Полные графы, простые графы, деревья, циклы. Степень вершины.

Литература

1. Э.Б. Винберг, «Курс алгебры», МЦНМО, 2019, 4-е изд.
2. В.А. Зорич, «Математический анализ», МЦНМО, 2019, 10-е изд., исправл.
3. Л.Б. Кораллов, Я.Г. Синай, «Теория вероятностей и случайные процессы», МЦНМО, 2013.
4. У. Рудин, «Основы математического анализа», Москва: Мир, 1976.
5. Р. Стэнли, «Перечислительная комбинаторика», Москва: Книга по Требованию, 2012.